



杨世强

## 四轮全方位轮式移动机器人的运动学模型研究

杨世强,傅卫平,张鹏飞

(西安理工大学 机械与精密仪器工程学院,西安 710048)

**摘要:**具有平面上全部3个自由度的全方位移动机器人,可以实现灵活的运动,因而得到广泛的关注。本文在分析全方位轮式移动机器人特性的基础上,针对麦克纳姆轮在一个方向上为主动,在与其垂直的方向上为从动的特点,根据刚体运动学原理,对一种四轮全方位轮式移动机器人的运动学方程进行了推导,建立了运动学模型,分析了运动学误差。最后,基于滚动窗口路径规划,通过计算机仿真与实验验证,结果表明该运动学模型正确可行。

**关键词:**全方位轮;移动机器人;运动学模型

中图分类号:TP24

文献标识码:A

文章编号:1003-8728(2009)03-0412-04

## A Study of the Kinematics Model of a Mobile Robot with Four Omni-directional Wheels

Yang Shiqiang, Fu Weiping, Zhang Pengfei

(Faculty of Mechanical and Precision Instrument Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048)

**Abstract:** Omni-directional mobile robots with three degrees of freedom possess high mobility on the motion plane. An omni-directional mobile robot is constructed which consists of four sets of wheel assemblies equally spaced at 90 degrees from one another. Each of its wheel assembly consists of a pair of Mekanum wheels with an active (the propelling direction of the actuator) and a passive (free-wheeling) direction which are orthogonal to each other. The kinematic model of the mobile robot is established according to rigid kinematics, and the kinematic precision of the omni-directional wheel is analyzed. The validity and feasibility of this kinematic model is verified by MATLAB simulation and experiments in laboratory based on rolling window path planning algorithm.

**Key words:** omni-directional wheel; mobile robot; kinematics model

轮式移动机器人具有良好的稳定性、较快的移动能力等优点,在足球机器人比赛等领域得到了广泛的应用。全方位轮式机器人能够在保持车体姿态不变的情况下沿平面上任意方向作直线移动,理论上可在机器人所处平面上以任何角度和速度运动,机动性增强,非常适合工作在空间有限、狭窄、对机器人的机动性要求高的场合中。

国外很多研究机构对全方位轮式移动机器人的有关问题,如车轮设计制造、机器人轮子的配置方案以及机器人的运动学分析等方面进行了广泛的研究,形成了许多有特色的移动机器人产品<sup>[1-7]</sup>。国内部分高校和研究机构也对全方位机器人进行了研究<sup>[8-11]</sup>,主要集中在小型足球机器人的应用方面,对全方位移动机器人的运动学模型的分析 and 讨论主要建立在计算机仿真基础上<sup>[10,11]</sup>。本文在分析全方位移动机器人特性的基础上,针对一种四轮全方位移动机器人建立了运动学模型,并通过计算机仿真与实验,验证了该模型的正确性与可行性。

收稿日期:2008-05-19

基金项目:国家自然科学基金项目(10872160)和陕西省机械装备制造重点实验室项目(05JS29)资助

作者简介:杨世强(1973-),博士研究生,研究方向为智能机器人, yangsq@126.com

### 1 全方位轮式移动机器人

移动机器人在平面上存在前后移动、左右移动和自身转动3个自由度的运动,若机器人所具有的自由度少于3个,则为非全方位移动机器人,由于受到非完整性约束,这种类型的机器人是典型的非完整系统;若所具有的自由度等于3个,则为全方位移动机器人。由于全方位轮有效避免了普通轮子不能侧滑带来的非完整性约束,在支持面上具有独立的两个平移运动和绕垂直轴的一个转动,所以全方位轮式移动机器人是一种完整系统<sup>[9]</sup>。

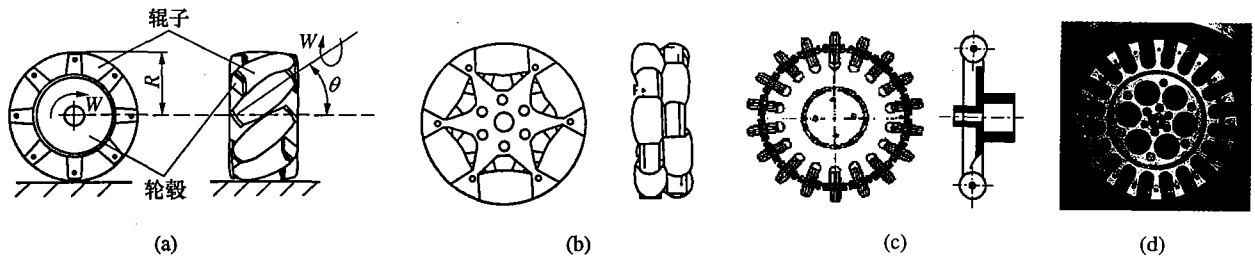


图1 麦卡姆轮

如图1(a)所示的麦卡姆轮在轮毂的外缘按一定的角度安装一组辊子,为了减小当机器人运动时辊子间距太大而引起的振动,保证运动的平滑性,辊子的形状要保证轮的侧视图为圆形。轮毂的回转轴和辊子回转轴之间的夹角为 $\theta$ ,当轮毂受到电机等的驱动,以角速度 $\omega$ 向前滚动时,处于轮毂边缘的辊子与地面摩擦,使得辊子以 $w$ 绕自身的回转轴转动,一组辊子按与地面接触的顺序依次转动,使得整个轮毂整体向前滚动。显然,由不少于3个这样的麦卡姆轮便可组成一个轮式移动机器人移动平台。每个轮子具有3个自由度:绕轮毂轴心(下称轮子轴心)转动、绕辊子轴心的转动及绕轮子和地面接触点转动。

由于辊子之间存在间隙,使轮子在运动过程中与地面接触点的高度发生变化,导致车体振动或打滑,因而增加了运动学计算误差。通常的改进方法是增加轮毂排数以增强运动的平稳性,如图1(b)所示和增加辊子的数目以减小辊子间间隙,如图1(c)所示。图1(c)、图1(d)所示的轮子是麦卡姆轮在 $\theta = \pi/2$ 时的情形。

### 2 四轮全方位移动机器人运动学建模

本文所采用的移动机器人配备如图1(d)所示的4个全方位轮,呈 $90^\circ$ 均布在半径为 $R_D$ 的圆周上,如图2所示。每个全方位轮由一个带编码器的直流伺服电机驱动,控制各轮的运动速度,4个电机

以全方位轮为行走机构的机器人,能够在保持车体姿态不变的前提下沿平面上任意方向作直线移动,运动路径最短,用时少,相比差动驱动机器人具有更强的优势。在机器人运动过程中,每个全方位轮由一个独立的电机驱动,通过控制各个驱动电机来决定车体的移动方向和位姿,实现全方位行走。全方位轮式移动机器人所配备的车轮主要有麦卡姆轮<sup>[1,2]</sup>,也称为瑞典轮、球形轮<sup>[3]</sup>、连续过渡轮<sup>[4,5]</sup>和正交轮等<sup>[6,12]</sup>。

共同驱动来合成机器人中心某时刻的速度和角速度。通过编码器来记录和反馈各轮行走过的位移,位移累积可求得机器人中心的位移。

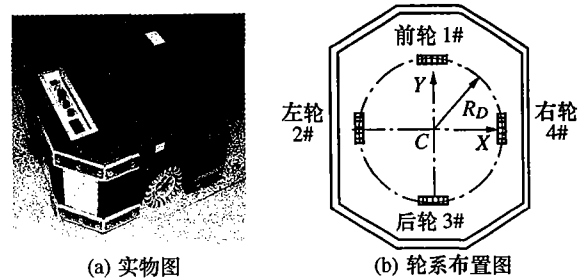


图2 移动机器人与轮系分布图

基本假设:

- (1) 机器人驱动轮和地面均为刚体。
- (2) 运动局限在水平地面上。
- (3) 机器人的中心和质心重合。

(4) 车轮与地面接触具有足够的摩擦力,在车子运动过程中轮子与接触面不发生相对滑动,只发生绕轮毂轴和辊子轴方向的纯滚动。

#### 2.1 四轮全方位移动机器人运动学模型

机器人运动学模型是机器人中心点运动轨迹控制的基础,在路径规划算法构建机器人可运行路径后,将中心点的移动转化为各轮的转动。参照文献[12]三轮全方位车辆运动学分析,可以建立如图3所示的几何图。

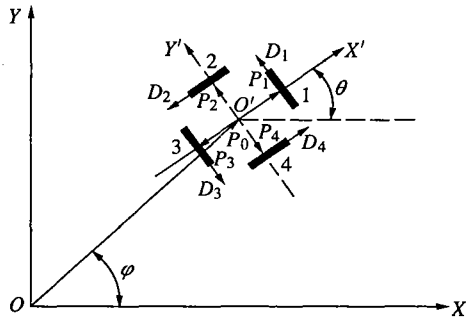


图 3 全方位轮几何图

图 3 中,1,2,3,4 分别表示 4 个全方位轮编号,机器人坐标系  $\Sigma X'O'Y'$  的原点与机器人质心  $O'$  重合, $X'$  轴与 1 轮轴线重合。某一时刻  $t$ ,机器人在世界坐标系  $\Sigma XOY$  中的位姿可以用  $(x, y, \theta)^T$  表示, $x, y$  表示机器人中心的位置, $\theta$  为此刻轴  $X'$  与轴  $X$  的夹角,表示机器人的姿态。机器人质心到 4 个轮子中心的距离相等,均由  $L$  表示。 $P_i (i=1, 2, 3, 4)$  表示在  $\Sigma X'O'Y'$  中起点为  $O'$ ,终点为第  $i$  个轮中心的向量,有

$$P_1 = L \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 = L \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, P_3 = L \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_4 = L \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$D_i$  表示在  $\Sigma X'O'Y'$  中起始点为第  $i$  个轮中心,方向为各个轮子驱动正方向的单位矢量。

假设各轮  $D_i$  的方向按逆时针,故而  $D_i$  与  $P_i$  之间存在以下关系,即

$$D_i = \frac{1}{L} R \left( \frac{\pi}{2} \right) P_i \quad (1)$$

$R(\alpha)$  为二维旋转矩阵,其形式为

$$R(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (2)$$

按式(1)计算后可得

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, D_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, D_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$P_0$  表征  $O'$  点在绝对坐标系中的位置;

$$P_0 = [x(t), y(t)]^T \quad (3)$$

$V = P_0'$ , 表示机器人中心速度矢量。

设第  $i$  个轮中心点在绝对坐标系  $\Sigma XOY$  中的位置向量为  $R_i$ , 可以表示为

$$R_i = P_0 + R(\theta) P_i$$

上式两边关于时间  $t$  求导,可得

$$R_i' = P_0' + R(\theta)' P_i \quad (4)$$

设  $V_i$  表示第  $i$  个轮子中心的速度,故有

$$V_i = R_i' \quad (5)$$

联立式(4)和式(5)可得

$$V_i = P_0' + R(\theta)' P_i \quad (6)$$

矢量  $V_i$  是第  $i$  个轮子法向速度  $V_{fi}$  和切向速度  $V_{qi}$  的合成,如图 4 所示, $V_{qi}$  的大小和方向受这个轮子的电机控制, $V_{qi} = w_i r$ ,  $r$  为轮子半径; $V_{fi}$  的大小和方向由另外 3 个轮子的电机共同控制。 $V_i$  与  $V_{qi}$  之间存在如下关系

$$V_{qi} = V_i^T (R(\theta) D_i) \quad (7)$$

将式(6)代入式(7),整理可得

$$V_{qi} = (P_0')^T R(\theta) D_i + L \theta' \quad (8)$$

将式(1)~式(3)代入式(8)中,有

$$\begin{pmatrix} V_{q1} \\ V_{q2} \\ V_{q3} \\ V_{q4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta & \cos\theta & L \\ -\cos\theta & -\sin\theta & L \\ \sin\theta & -\cos\theta & L \\ \cos\theta & \sin\theta & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{pmatrix} \quad (9)$$

式中: $x', y', \theta'$  为机器人位姿的变化率。由图 3 可知

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \cos\varphi \\ V \sin\varphi \\ w \end{pmatrix} \quad (10)$$

由  $V_{qi} = w_i r$  得

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} V_{q1} \\ V_{q2} \\ V_{q3} \\ V_{q4} \end{pmatrix} \quad (11)$$

联立(9)~式(11)可得四轮全方位移动机器人运动学模型为

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\sin\theta & \cos\theta & L \\ -\cos\theta & -\sin\theta & L \\ \sin\theta & -\cos\theta & L \\ \cos\theta & \sin\theta & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \cos\varphi \\ V \sin\varphi \\ w \end{pmatrix} \quad (12)$$

由式(12)知,若已知  $(V, w, \theta, \varphi)$  便可求得各轮子的角速度  $w_i$ , 实现机器人运动控制。

### 2.2 几种特殊的运动

按式(12)得到的一般运动是机器人在平面上平动和转动的合成,特殊地,对于机器人的纯平动、纯转动等方式的运动,有如下关系:

(1) 当机器人作纯平动时,  $w = 0$ , 代入式(12)有

$$\begin{cases} w_1 = -w_3 \\ w_2 = -w_4 \end{cases}$$

可以看出,轮 1、轮 3 共轴,轮 2、轮 4 共轴,速度

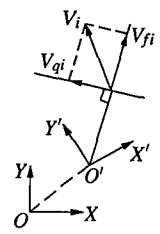


图 4 向量变换

相同,方向相反。

(2) 当机器人作纯转动时,  $V = 0$ , 代入式(12)有

$$w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = \frac{L}{r}w$$

此时4个轮以相同方向、相同速度驱动。

(3) 特殊的,若要求任意时刻,机器人质心(中心)的速度方向就是局部坐标系  $Y'$  轴的方向,故  $\varphi, \theta$  之间存在以下关系

$$\varphi = \theta + \pi/2$$

将此式代入式(12)中,可得

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & L \\ -1 & L \\ 0 & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ w \end{pmatrix}$$

### 2.3 全方位轮运动学计算误差

当全方位轮转过任意相邻两个小轮间距角度时,理论弧长和弦长之差为运动学误差,其值为

$$r \frac{2\pi}{n} - 2r \sin \frac{\pi}{n}$$

式中: $r$  为全方位轮半径; $n$  为沿全方位轮圆周布置的小辊轮个数。所以,当车轮每回转一周,其运动学计算误差为

$$\Delta = n \left( r \frac{2\pi}{n} - 2r \sin \frac{\pi}{n} \right) = 2\pi r - 2nr \sin \frac{\pi}{n}$$

可以看出,增加小辊轮的个数,可以有效地减小

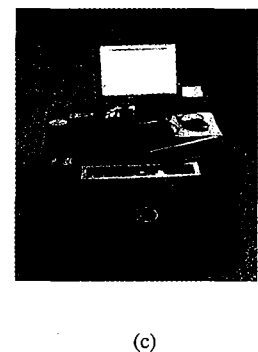
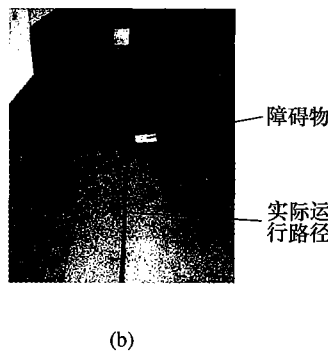
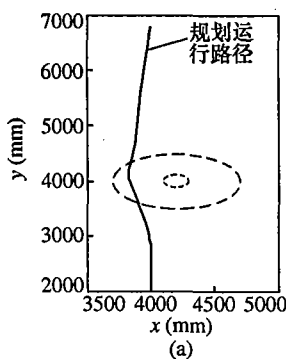


图5 路径规划仿真与实验结果

比较路径规划计算机仿真与实验运行结果(图5(a)、图5(b)),可以看出,机器人实验运行的整体趋势符合仿真结果,能有效地避开障碍物,完成机器人导航任务,表明机器人运动学模型正确有效,但两者之间存在一定的误差。

根据实验中的实际条件,分析引起误差的主要原因有:机器人运动学累计误差,车轮与地面打滑现

象、振动较为严重,实验中未考虑数字编码器以及电子罗盘的系统误差和累计误差。另外,由于实验中绘制运动曲线的画线简易装置安装在机器人的尾部,如图5(c)所示,并非机器人坐标系原点,当机器人姿态发生变化时,引起曲线的较大误差。

### 3 仿真与实验

实验中采用基于行为动力学的机器人滚动窗口路径规划方法<sup>[13]</sup>。首先根据机器视觉所获得的窗口(局部环境)信息,采用启发式函数进行局部子目标优化选择,然后以窗口为单位,在窗口中将导航行为分解为趋于目标行为和避障行为,运用动力系统稳定性理论建立以上两种行为的行为模式动力学模型和行为模式竞争模型<sup>[14]</sup>,构成导航行为动力学模型进行在线自主路径规划,计算出移动机器人导航角  $\theta(t)$ ,最后将一系列窗口中的规划轨迹按照连续性条件首尾相接,完成全局规划任务。质心速率为恒速,事先给定,机器人正向,即1轮轴线方向,始终与前进方向一致。图5(a)、图5(b)分别为运用MATLAB 计算机仿真与对应实验结果,图中粗线表示运用该方法规划和实际运行路径。机器人起始点位姿、终点位姿以及障碍物等信息如下:

起始位姿:(4000 mm,2000 mm, $\pi/2$ )。

终点位姿:(4000 mm,6800 mm, $\pi/2$ )。

障碍物位置:(4200 mm,4000 mm),经“膨化”后的所占圆域的半径为500 mm;“膨化”前的实际占据的圆域半径为100 mm。

移动速率: $v = 10$  mm/s。

虚拟滚动窗口的大小:1000 mm  $\times$  800 mm。

象、振动较为严重,实验中未考虑数字编码器以及电子罗盘的系统误差和累计误差。另外,由于实验中绘制运动曲线的画线简易装置安装在机器人的尾部,如图5(c)所示,并非机器人坐标系原点,当机器人姿态发生变化时,引起曲线的较大误差。

(下转第420页)

该指令的子机器人的 ID 号, ID = 1 即为领导者子机器人; 2 为对应于表 1 的运动描述, 即左转弯; 40 为领导者子机器人的速度。领导者子机器人接收到该命令后, 与自己检测到的信息综合后发送的指令为

信息头	3	2	2	40	信息尾
-----	---	---	---	----	-----

其中 3 为对应于图 4 中的通过工具相连的子机器人组合构型; 第 1 个 2 表示运动模式为左转弯; 第二个 2 表示该小组中子机器人的数目等于 2; 40 表明领导者的速度应该等于 40 mm/s。领导者子机器人的计算模块通过匹配该模式与状态表中相对应的模式, 再根据  $v_1 = 40$  和左转弯计算出跟随者子机器人的速度, 然后把两个速度分别与子机器人的 ID 号相匹配, 发送给 CAN 总线, 子机器人组从 CAN 总线上接收到运动控制命令后同时运动。

## 5 结论

本文提出了可重构星球探测系统初步的协调控制体系和通讯协议, 提出了以分散式和集中式相结合, 以完全分散式控制为发展方向的复合式控制体系, 并对此进行了试验研究。

致谢: 本研究是与日本东京工业大学 Shigeo Hirose 教授合作完成, 感谢 Shigeo Hirose, Atsushi Kawakami, Kazuhiro Motomura 的帮助。

## [参考文献]

- [1] 刘方湖, 陈建平, 马培芬等. 行星探测机器人的研究现状和发展趋势[J]. 机器人, 2002, 24(3): 268 ~ 275
- [2] Koshiyama A, Yamafuji K. Design and control of an all-direction steering type mobile robot[J]. *The International Journal of Robotics Research*, 1993, 12(5): 411 ~ 419
- [3] Hayati S, Volpe R, Backes P, et al. The rocky 7 rover: a mars science craft prototype[A]. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation* [C], New York; 1997: 124 ~ 129
- [4] Yim M, Zhang Y, Duff D. Modular robots[A]. *IEEE Spectrum* [C], New York; 2002: 214 ~ 219
- [5] Shen W M, Lu Y, Will P. Hormone-based control for self-reconfigurable robots[A]. *Proceedings of International Conference on Autonomous Agents* [C], Barcelona, Spain, 2000: 412 ~ 416
- [6] Hirose S. Super-mechano-colony and SMC rover with detachable wheel units[J]. *Proceedings COE Workshop*, 1999, 11(3)
- [7] 张力平, 马书根, 李斌, 张政, 曹秉刚. 可重构星球探测机器人运动学建模及轨迹规划[J]. 西安交通大学学报, 2005, 39(1): 1110 ~ 1114
- [8] 王明辉, 马书根, 李斌等. 可重构星球探测机器人控制系统的设计与实现[J]. 机器人, 2005, 27(3): 56 ~ 60

(上接第 415 页)

## 4 结论

本文针对麦克纳姆轮全方位轮在一个方向上为主动, 在与其垂直的方向上是从动的特点, 根据刚体运动学, 对一种四轮全方位轮式移动机器人的运动学方程进行了推导, 建立运动学模型。最后, 基于滚动窗口路径规划, 通过计算机仿真与实验对比, 结果表明机器人在该模型控制下运动轨迹与计算机仿真结果一致, 表明该模型正确、可行。对于机器人振动、打滑较严重问题需做进一步研究。

## [参考文献]

- [1] West M, Asada H H. Design and control of ball wheel omnidirectional vehicles[A]. *Proceedings of the 1995 IEEE International Conference on Robotics and Automation* [C], 1995
- [2] Tahboub K A, Asada H H. Dynamics analysis and control of a holonomic vehicle with a continuously variable transmission[J]. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2002, 124(3): 118 ~ 126
- [3] Muir P F, Neuman C P. Kinematic modeling for feedback control of an omnidirectional wheeled mobile robot[A]. *Proceedings of the 1987 IEEE International Conference on Robotics and Automation* [C], 1987: 1772 ~ 1778
- [4] Wilson L, Williams C, Yance J, et al. Design and modeling of a redundant omni-directional RoboCup Goalie[A]. *Proceedings RoboCup 2001 International Symposium* [C], Seattle, 2001
- [5] Carter B, Good M, Dorohoff M, et al. Mechanical design and modeling of an omni-directional RoboCup player[A]. *RoboCup AI Conference* [C], Seattle WA; 2001: 1 ~ 10
- [6] Pin F G, Killough S M. A new family of omnidirectional and holonomic wheeled platforms for mobile robots[J]. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1994, 10(4): 480 ~ 489
- [7] Moore K L, Flann N S. A six-wheeled omnidirectional autonomous mobile robot [J]. *IEEE Control System Magazine*, 2000, 20(6): 53 ~ 66
- [8] 孙刚, 李永新, 皮骄阳等. Robocup 小型足球机器人的运动分析与控制[J]. 自动化与仪表, 2003, (6): 48 ~ 51
- [9] 张翻, 熊蓉, 褚健, 丁冠英. 一种全方位移动机器人的运动分析与控制实现[J]. 浙江大学学报, 2004, 38(12): 1650 ~ 1672
- [10] 袁晓璐, 赵臣. 全方位小型足球机器人的运动学分析[J]. 机械科学与技术, 2007, 26(11): 1048 ~ 1052
- [11] 赵冬斌, 易建强, 邓旭. 全方位移动机器人结构和运动分析[J]. 机器人, 2003, 25(5): 394 ~ 398
- [12] Tamás Kalmár-Nagy, et al. Near-optimal dynamic trajectory generation and control of an omnidirectional vehicle[J]. *Robotics and Autonomous Systems*, 2004, 46(1): 47 ~ 64
- [13] 傅卫平, 张鹏飞, 杨世强. 基于行为动力学的机器人滚动窗口路径规划[J]. 计算机工程与应用, 2009, 45(2): 212 ~ 215
- [14] 杨世强, 傅卫平. 基于行为动力学的智能机器人导航行为演化研究[J]. 应用力学学报, 2008, 25(1): 66 ~ 70